Rambu Jawaban FINAL TEST July 2012

Subject : Linear Algebra

1. $P(\lambda) = |\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = 3 - 7\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3 = (1 - \lambda)\,(1 - \lambda)(3 - \lambda)$

   Diperoleh: $\lambda_{1,2} = 1$ dan $\lambda_3 = 3$.

   Untuk $\lambda = 1$, diperoleh vector invariant $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Untuk $\lambda = 3$, diperoleh vector invariant $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Karena matriks ***A*** berdimensi 3x3 mempunyai tiga vector invariant yang bebas linear, maka matriks ***A*** diagonalisabel.

   $\boldsymbol{P} = (X_1\ X_2\ X_3) = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -4 & 15 \\ -1 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

   $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{D}$ (diagonal matrix).

2. Andaikan $X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Misal $X_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ orthogonal dengan X_1; berarti $X_1.X_2 = 0$, sehingga:

   $2a - b - 2c = 0$. Penyelesaian persamaan ini adalah $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Misal dipilih $X_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Andaikan diambil $X_3 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ harus orthogonal dengan X_1 dan X_2, maka :

   $X_3.X_2 = 0 \rightarrow p + r = 0$
   $X_3.X_1 = 0 \rightarrow 2p - q - 2r = 0$

Penyelesaian system persamaan tersebut adalah $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Jadi $X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Selanjutnya vector-vektor X_1, X_2, dan X_3 dinormalisasi :

$X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow g_1 = X_1/|X_1| = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow g_2 = X_2/|X_2| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

$X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow g_3 = X_3/|X_3| = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Jadi basis orthonormal adalah $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$

3. Given a transformation matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Find :

   (a). Polinom karakteristik: $P(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 5 - 11\lambda + 7\lambda^2 - \lambda^3 = (1-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda)$

   (b). Polinom minimum: $m(\lambda) = (1-\lambda)(5-\lambda) = 5 - 6\lambda + \lambda^2$; sebab

   $$m(\mathbf{A}) = 5\boldsymbol{I} - 6\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

   (c). berdasarkan hasil (b) tersebut :

   $m(\mathbf{A}) = 0$

   $5\boldsymbol{I} - 6\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 = 0$

   $5\boldsymbol{I} = 6\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^2$

   $5\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{A}^{-1} = (6\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^2)\,\boldsymbol{A}^{-1}$

   $5\boldsymbol{A}^{-1} = 6\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{5}(6\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. $P(\lambda) = |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = -15\lambda + 8\lambda^2 - \lambda^3 = (5-\lambda)(3-\lambda)(-\lambda)$

   Diperoleh: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ dan $\lambda_3 = 5$.

   Untuk $\lambda = 0$, diperoleh vector invariant $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Untuk $\lambda = 3$, diperoleh vector invariant $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Untuk $\lambda = 5$, diperoleh vector invariant $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Karena vector-vektor X_1, X_2, dan X_3 diperoleh dari akar karakteristik yang berbeda, maka ketiga vector tersebut pasti sudah saling orthogonal. Selanjutnya ketiga vector tersebut langsung dinormalisasi :

   $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow g_1 = X_1/|X_1| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

   $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow g_2 = X_2/|X_2| = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

   $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow g_3 = X_3/|X_3| = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

   Matriks orthogonal $\boldsymbol{R} = (g_1\ g_2\ g_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

   $$\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{D}.$$

5. Misal koordinat relative q terhadap basis P adalah (x, y, z), maka berlaku :
$q = xp_1 + yp_2 + zp_3$
$-1 - 3t + 3t^2 = x(3 + 4t + 3t^2) + y(5 + 10t) + z(4 + 7t + 2t^2)$
Diperoleh system persamaan :
$3x + 5y + 4z = -1$
$4x + 10y + 7z = -3$
$3x \quad + 2z = 3$
Dari system persamaan tersebut diperoleh penyelesaian: x = -1, y = -2, z = 3. Jadi koordinat $q_P = (-1, -2, 3)$.

6. Karena $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ berdimensi 2x2, supaya diagonalisabel harus mempunyai dua vector invariant (*eigen vectors*) yang bebas linear. Karena matriks $\boldsymbol{A}$ berdimensi 2x2, untuk dapat mempunyai 2 vector invariant yang bebas linear, haruslah kedua vector invariant tersebut harus berasal dari dua buah akar karakteristik (*eigen value*) yang berbeda. Supaya mempunyai dua akar karakteristik yang berbeda, maka:
$P(\lambda) = |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$
$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = (ad - bc) + (-a - d)\lambda + \lambda^2 = 0$
Persamaan tersebut supaya mempunyai dua akar karakteristik yang berbeda haruslah: $(-a - d)^2 - 4(ad - bc) > 0$ atau $a^2 - 2ad + 4bc + d^2 > 0$.

7. $\mathbf{T}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 \\ 4x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 8x_4 - 6x_5 \\ -3x_1 + 6x_2 - 8x_3 - 5x_4 + 2x_5 \\ 5x_1 - 10x_2 + 14x_3 + 7x_4 \end{pmatrix}$.

(a). Matriks transformasi $T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & -8 & 10 & 8 & -6 \\ -3 & 6 & -8 & -5 & 2 \\ 5 & -10 & 14 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Basis Im($\mathbf{T}$) = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, dan dim Im(T) = 2.

(b). Basis dan dimensi null space Ker(**T**). Mencari vector **u** = $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ sedemikian hingga

T(**u**) = 0. Diperoleh system persamaan linear homogeny:

$$\begin{aligned} a-2b+2c+3d-4e&=0 \\ 4a-8b+10c+8d-6e&=0 \\ -3a+6b-8c-5d+2e&=0 \\ 5a-10b+14c+7d&=0 \end{aligned}$$

Dari system persamaan tersebut diperoleh penyelesaian : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Jadi basis Ker(T) = $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Dim Ker(T) = 3.

oooo000oooGOOD LUCKooo000ooo